# FRAZIONI ALGEBRICHE

## OPERAZIONI CON LE FRAZIONI ALGEBRICHE

A] SEMPLIFICAZIONE DI UNA FRAZIONE ALGEBRICA

> **Semplificare una frazione algebrica** significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero.

**Procedura per semplificare (ridurre ai minimi termini) la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.**

<u>Descriviamo, attraverso un esempio, la procedura</u>:

<u>Esempio</u>: Ridurre ai minimi termini la frazione:$f = \dfrac{a^2 - 6a + 9}{a^4 - 81}$

I° passo: **scomponiamo in fattori**

**- il numeratore:** $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$

e

somma di quadrati irriducibile

**- il denominatore:** $a^4 - 81 = (a^2 - 9) \cdot (a^2 + 9) = (a - 3) \cdot (a + 3) \cdot (a^2 + 9)$

differenza di quadrati

II° passo: **ricostruiamo la frazione** $f = \dfrac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}$ dove sono evidenti i fattori comuni al numeratore e al denominatore

III° passo: **determiniamo C.E.**

- Poniamo: **C.E.:** $(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9) \neq 0$ da cui $a \neq 3$ e $a \neq -3$; il terzo fattore non si annulla mai essendo una somma di numeri positivi, quindi **C.E.: $a \neq -3$ e $a \neq +3$**

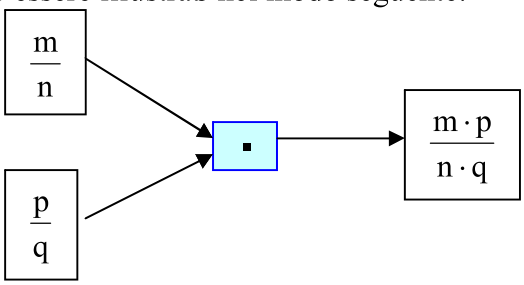
IV° passo: con queste condizioni l'unico fattore uguale al numeratore e al denominatore è (a– 3) ed è diverso da zero, quindi **semplifichiamo**:

$$f = \frac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \frac{(a-3)^2}{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \frac{(a-3)}{(a+3)\cdot(a^2+9)}$$

## B] MOLTIPLICAZIONE

DEFINIZIONE: il **prodotto di due frazioni** è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente:




**Procedura per determinare il prodotto delle frazioni algebriche:** $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$

<u>Descriviamo, attraverso un esempio, la procedura</u>:

<u>Esempio:</u> Determinare il prodotto delle frazioni algebriche

$$f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2} \quad \text{e} \quad f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$$

I° passo: **scomponiamo in fattori tutti i denominatori** (servirà per la determinazione delle C.E.) **e tutti i numeratori** (servirà per le eventuali semplificazioni)

$$f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)} \quad \text{e} \quad f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}=\frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$$

II° passo: **determiniamo C.E.**

- Poniamo le C.E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: **C.E.: $x-1\neq 0$ e $x-2\neq 0$ e $x\neq 0$ e $2x-1\neq 0$** da cui

**C.E.: $x\neq 1$ e $x\neq 2$ e $x\neq 0$ e $x\neq 1/2$**

III° passo: **determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni**:

$$f=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{5}{(x-2)\cdot(2x-1)}$$

C] POTENZA DI UNA FRAZIONE ALGEBRICA

Nell'insieme delle frazioni algebriche è definita l'operazione elevamento a potenza.

DEFINIZIONE: la potenza di **esponente n, naturale diverso da zero**, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con $B \neq 0$ (**C.E.**) è la frazione avente per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

<u>Esempio 1</u>: Calcolare $f^3$ essendo $f = \frac{x-2}{x^2-1}$.
Innanzi tutto, prima di calcolare la potenza, **indichiamo le C.E.** per la frazione assegnata.

$f = \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$ con **C.E.: $(x-1)\cdot(x+1) \neq 0$** da cui **C.E. $x \neq 1$ e $x \neq -1$**

dunque si ha $f^3 = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^3 \cdot (x+1)^3}$ con le condizioni poste.

**CASI PARTICOLARI DELL'ESPONENTE**

**1.** Se **$n = 0$** sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^0 = 1 \quad \text{con} \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad B \neq 0$$

<u>Esempio 2</u>: Quali condizioni deve rispettare la variabile affinché si abbia $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0 = 1$?

**Per rispondere alla domanda dobbiamo individuare le C.E. e i valori della variabile a che rendano la frazione diversa da zero.**

- **Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore** della frazione: $f = \frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}$
- **Determiniamo C.E.**:
  - Poniamo le **C.E.: $a + 2 \neq 0$ e $a \neq 0$** da cui **C.E.: $a \neq -2$ e $a \neq 0$**
- Poniamo la **condizione affinché la frazione non sia nulla**, ricordando che questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero; indichiamo con $C_0$ questa condizione dunque **$C_0 : 3a - 2 \neq 0$** da cui **$C_0 : a \neq 2/3$**
- **Aggiorniamo le C.E.** **C.E.: $a \neq -2$ e $a \neq 0$ e $a \neq 2/3$**

**Risposta**: la variabile a deve soddisfare le condizioni sopra individuate.

**2.** Se **n è intero negativo** sappiamo che la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza con esponente opposto dell'inverso della base; lo stesso può dirsi se la base è una frazione algebrica:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\left(\frac{B}{A}\right)^{+n} \quad \text{con} \quad A\neq 0 \quad \text{e} \quad B\neq 0$$

Esempio 3: Determiniamo $f^{-2}$ con $f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}$.

• **Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore** della frazione:

$$f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}=\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}$$

• **Determiniamo C.E.**:
  - Poniamo le **C.E.**: $\mathbf{x \neq 0}$ **e** $\mathbf{x^2+1\neq 0}$ da cui essendo l'altro fattore diverso da zero per qualunque valore della variabile in quanto somma di numeri positivi

**C.E.: $\mathbf{x\neq 0}$**

• **Determiniamo la frazione inversa di f** ;
**Per poterne fare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla** e questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere $\mathbf{C_0 = (x+2)\cdot(x+3) \neq 0}$ da cui $\mathbf{C_0 = x\neq -2}$ **e** $\mathbf{x\neq -3}$.

• **Aggiorniamo le condizioni** **C.E. : $\mathbf{x\neq 0}$ e $\mathbf{x\neq -2}$ e $\mathbf{x\neq -3}$**

Con queste condizione l'operazione richiesta ha come risultato:

$$f=\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}=\left(\frac{x\cdot(x^2+1)}{(x+2)\cdot(x+3)}\right)^{2}=\frac{x^2\cdot(x^2+1)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$$

Osservazioni:
Con le dovute condizioni, nell'insieme delle frazioni algebriche valgono le proprietà delle potenze viste nell'insieme dei razionali.

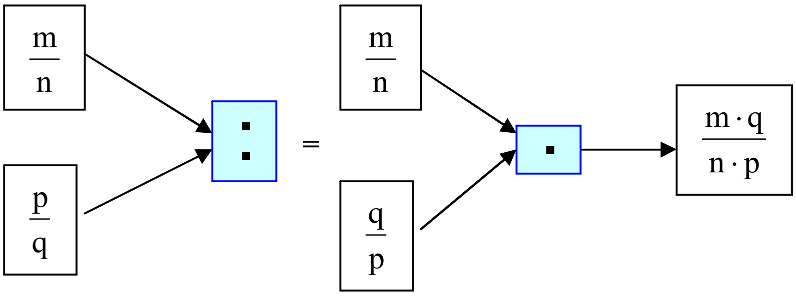
Con le dovute condizioni, se è possibile, si possono ridurre le frazioni ai minimi termini prima di procedere nello svolgimento di un calcolo proposto.

## D] DIVISIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Nell'insieme delle frazioni algebriche è definita l'operazione di divisione con la condizione che la frazione divisore sia diversa da zero.

DEFINIZIONE: **il quoziente di due frazioni F e f** con f diversa da zero è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima (F) con l'inverso della seconda ($f^1$).

Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto tra le frazioni numeriche:




**Procedura per determinare il quoziente delle frazioni algebriche:** $\frac{A}{B} : \frac{C}{D}$

<u>Descriviamo, attraverso un esempio, la procedura</u>:

<u>Esempio</u>: Determinare il quoziente delle frazioni algebriche: $f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2b}$ ; $f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2}$

I° passo: **scomponiamo in fattori tutti i numeratori e tutti i denominatori**:

$$f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2b} = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b} \quad ; \quad f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2} = \frac{a\cdot(a-b)}{b^2}$$

II° passo: **determiniamo C.E.**:

- Poniamo le **C.E.**: $\mathbf{2a^2b \neq 0}$ **e** $\mathbf{b^2 \neq 0}$ da cui

**C.E. : a ≠ 0 e b ≠ 0**

III° passo: **determiniamo la frazione inversa di** $\mathbf{f_2}$;

**Per poter fare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla.**

Questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere $\mathbf{C_0 = a\cdot (a-b) \neq 0}$ da cui $\mathbf{C_0 =}$ **a ≠0 e a ≠ b**.

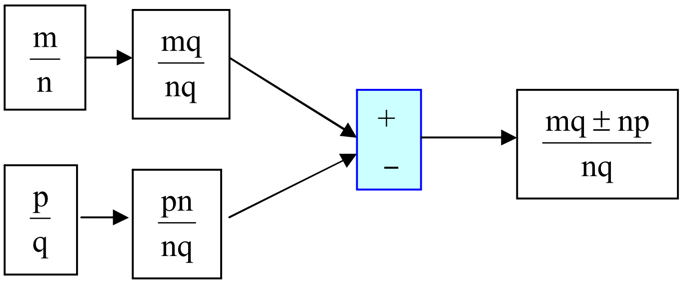
IV° passo: **aggiorniamo le condizioni**: **C.E. : a ≠ 0 e b ≠ 0 e a ≠ b**

V° passo: **cambiamo la divisione in moltiplicazione** e determiniamo il risultato con le eventuali semplificazioni:

$$f = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b} : \frac{a\cdot(a-b)}{b^2} = \frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}} \cdot \frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}} = \frac{3b}{2a^3}$$

## E] SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Nell'insieme delle frazioni algebriche è definita l'operazione di somma algebrica il cui schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente:




**Procedura per determinare la somma algebrica delle frazioni algebriche:** $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D}$

- I due addendi sono **frazioni con lo stesso denominatore:**

Esempio 1: Si vuole determinare la seguente somma algebrica: $S = \frac{2x-3y}{x+y} + \frac{x+2y}{x+y}$

I° passo: **poniamo le C.E.: $x + y \neq 0$** da cui

**C.E.: $x \neq -y$**

Come abbiamo operato in **Q**, **la somma è la frazione avente come denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma dei numeratori**:

$S = \frac{2x-3y}{x+y} + \frac{x+2y}{x+y} = \frac{(2x-3y)+(x+2y)}{x+y} = \frac{3x-y}{x+y}$ ottenuta togliendo le parentesi e sommando i monomi simili al numeratore.

Osservazione: a questo caso ci si può sempre ricondurre, pur di trasformare le frazioni allo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori, ma, come abbiamo operato in **Q**, scegliamo il m.c.m dei denominatori delle frazioni addendi.

**Procedura per trasformare le frazioni allo stesso denominatore**

- si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni
- si trasforma ciascuna frazione come segue:
  - il nuovo denominatore è il m.c.m. trovato
  - il nuovo numeratore si ottiene dividendo il m.c.m. per il denominatore della frazione assegnata e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione assegnata;

Esempio 2:

Si vuole determinare la seguente somma algebrica: $S = \frac{x+y}{3x^2y} - \frac{2y-x}{2xy^3}$

I due addendi hanno monomi al denominatore; dobbiamo **trasformare le frazioni ad avere lo stesso denominatore**, dunque

I° passo: **calcoliamo il m.c.m. $(3x^2y, 2xy^3) = 6x^2y^3$** ;

II° passo: **poniamo le C.E.: $6x^2y^3 \neq 0$** da cui **C.E.: $x \neq 0$ e $y \neq 0$**

III° passo: **trasformiamo gli addendi allo stesso denominatore**; l'operazione che dobbiamo eseguire diventa:

$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)}{6x^2y^3}-\frac{3x\cdot(2y-x)}{6x^2y^3}=$ si procede ora come nel primo esempio; **la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori**:

$$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)-3x\cdot\left(2y^2-x\right)}{6x^2y^3}=\frac{\overbrace{2xy^2+2y^3-6xy^2}^{\text{monomi simili}}+3x^2}{6x^2y^3}=\frac{2y^3-4xy^2+3x^2}{6x^2y^3}$$

in cui non è lecita alcuna semplificazione.

Esempio 3: Eseguiamo la seguente somma algebrica: $S=\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}$

Le frazioni addendi hanno polinomi al denominatore, dobbiamo **trasformare le frazioni ad avere lo stesso denominatore**, dunque

I° passo: **calcoliamo il m.c.m. dei denominatori**

1. scomponiamo in fattori ciascun denominatore
2. il m.c.m. è il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore

$$\begin{cases}x^2-2x=x\cdot(x-2)\\ x^2+2x=x\cdot(x+2)\\ x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)\end{cases}\quad;\quad \text{e}\quad \text{m.c.m.}=x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

II° passo: **poniamo le C.E.: $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\neq 0$** da cui **C.E.: $x\neq 0$ e $x\neq 2$ e $x\neq -2$**

III° passo: **trasformiamo le frazioni ad avere come denominatore il m.c.m. trovato**:

$$S=\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}+\frac{-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$$

IV° passo: **scriviamo la frazione risultato** avente come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma dei numeratori: $=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$

*(questi due passi possono essere eseguiti contemporaneamente)*

V° passo: **eseguiamo le operazioni al numeratore, riducendo i monomi simili**:

$$=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}$$

VI° passo: **semplifichiamo se possibile la frazione ottenuta**: $S=\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{(x+2)}$

CONCLUSIONE: nell'insieme delle frazioni algebriche, soddisfatte le dovute condizioni sono possibili le operazioni razionali: somma algebrica, moltiplicazione e divisione

## ESPRESSIONI LETTERALI CON FRAZIONI ALGEBRICHE

Attraverso la soluzione guidata di alcuni esercizi, faremo vedere come semplificare espressioni contenenti somme algebriche, moltiplicazioni, divisioni e potenze i cui termini sono frazioni algebriche.

**E1**: Semplificate la seguente espressione: $f=\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right):\frac{3}{4x^2-4}$

**Analisi preliminare**: f si ottiene dividendo la somma algebrica **S** per la frazione **F'**

$$f=\underbrace{\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right)}_{\mathbf{S}}:\underbrace{\frac{3}{4x^2-4}}_{\mathbf{F'}}$$

Scomponiamo tutti i denominatori degli addendi per poterne calcolare il m.c.m.; scomponiamo numeratore e denominatore di F' per poter eseguire la divisione.
Riscriviamo:

$$f=\underbrace{\left(\frac{x+1}{2\cdot(x-1)}+\frac{5}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x+3}{2\cdot(x+1)}\right)}_{\text{m.c.m.}=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}:\frac{3}{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Poniamo le C.E.: $2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\neq 0$, condizioni che rendono definita anche F', che non si annulla mai avendo il numeratore indipendente dalla variabile. Per cui **C.E.: $x \neq -1$ e $x \neq +1$**

Procediamo nella soluzione della somma e cambiamo la divisione in moltiplicazione

$$f=\left(\frac{(x+1)\cdot(x-1)+5-(x+3)\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\right)\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

eseguendo i calcoli al numeratore

$$\frac{x^2-1+5-x^2-2x+3}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

della prima frazione, dopo aver semplificato il prodotto, si ottiene: $f=\frac{2\cdot(7-2x)}{3}$

**E2**: Semplificate la seguente espressione: $f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$

**Analisi preliminare**: f si ottiene sommando i tre termini **$f_1$, $f_2$, $f_3$** e $f_2$ è il quoziente di due somme, come evidenziato nello schema seguente:

$$f=\underbrace{\frac{a-3}{a+3}}_{f_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)}_{f_2}-\underbrace{\frac{1}{3}}_{f_3}$$

Per semplificare $f_2$ dobbiamo innanzi tutto eseguire le somme nelle parentesi; determiniamo il m.c.m. e poniamo le **C.E.: 3·a ≠ 0** da cui

**C.E.: a ≠0**

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right):\left(\frac{3+a}{3a}\right)-\frac{1}{3}$$

Per eseguire la divisione poniamo **$C_0$: 3 + a ≠ 0** da cui

**C.E.: a ≠ -3**

Aggiorniamo le C.E. **C.E.: a ≠ 0 e a ≠ -3**

Proseguiamo nell'espressione cambiando la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right)\cdot\left(\frac{3a}{3+a}\right)-\frac{1}{3}=\frac{a-3}{a+3}+\frac{3-a}{a+3}-\frac{1}{3}=\frac{3a-9+9-3a-a-3}{3\cdot(a+3)}=\frac{-(a+3)}{3}=-\frac{1}{3}$$

**E3**: Semplificate la seguente espressione: $E=\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^3}+\frac{a}{1+a}$

**Analisi preliminare**: E si ottiene dalla somma di due frazioni algebriche **$f_1$, $f_2$**; $f_1$ è il prodotto della somma **s** con la frazione **f** come dallo schema sottostante

$$E=\underbrace{\underbrace{\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)}_{s}\cdot\underbrace{\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^3}}_{f}}_{f_1}+\underbrace{\frac{a}{1+a}}_{f_2}$$

Risolviamo la somma **s** e scomponiamo il numeratore di **f**:

$$E=\left(\frac{a}{(a-1)\cdot(a+1)}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(a-1)+(a-1)}{2a^3}+\frac{a}{1+a}=$$

$$=\left(\frac{a^3+a-a^3+a}{(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2+1)}\right)\cdot\frac{(a-1)\cdot(a^2+1)}{2a^3}+\frac{a}{1+a}=$$

mettiamo le C.E.: a – 1≠0 e a + 1≠0 e a≠ 0; per il fattore $a^2$ + 1 non mettiamo alcuna condizione perché è una somma di quadrati, quindi sempre diversa da zero. Quindi

**C.E.: a ≠ 1 e a ≠ -1 e a ≠ 0**

sommiamo i monomi simili al numeratore di **s**, semplifichiamo i fattori uguali tra **s** ed **f** e otteniamo:

$$E=\left(\frac{\cancel{a^3}+\overbrace{\cancel{a-a^3+a}}^{\cancel{2a}}}{\cancel{(a-1)}\cdot(a+1)\cdot\cancel{(a^2+1)}}\right)\cdot\frac{\cancel{(a-1)}\cdot\cancel{(a^2+1)}}{\cancel{2a^3}\,a^2}+\frac{a}{1+a}=\frac{1}{a^2\cdot(a+1)}+\frac{a}{1+a}=\frac{1+a^3}{a^2\cdot(a+1)}$$

scomponiamo il numeratore, semplifichiamo i fattori uguali e otteniamo:

$$E=\frac{1+a^3}{a^2\cdot(a+1)}=\frac{(1+a)\cdot(1-a+a^2)}{a^2\cdot(a+1)}=\frac{(1-a+a^2)}{a^2}$$