INTEGRALE INDEFINITO

PREMESSA: assegnata una funzione reale di variabile reale y = f(x), continua e definita in un insieme D, sappiamo che possiamo determinare la sua funzione derivata prima y = f'(x).
Ci chiediamo allora: "una funzione assegnata può essere la derivata di qualche altra funzione? Se si, è unica la funzione da cui deriva?"

• DEFINIZIONE:
Si chiama **primitiva di una funzione** reale di variabile reale y = f(x), **ogni funzione** F(x) la cui derivata è f(x) stessa.

$$\mathrm{F(x)} = P(\mathrm{f(x)}) \quad \textit{tale che} \quad \frac{D(\mathrm{F(x)})}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f(x)}$$

Osserviamo subito che, mentre la derivata di una funzione è unica, la funzione primitiva non è unica in quanto sappiamo che le funzioni y =f(x) e y = f(x) + K (K $\in$ R) hanno la stessa funzione derivata. Si parlerà dunque di **insieme delle funzioni primitive** di una funzione assegnata.

Esempio: y = sen(x) e y = sen(x) + 1 hanno la stessa funzione derivata prima y' = cos(x). Dunque assegnata la funzione y = cos(x) le sue primitive sono y = sen(x) + K.

• DEFINIZIONE:
L'insieme delle funzioni primitive di una funzione assegnata si chiama **integrale indefinito** e si indica con $\int \mathrm{f(x)dx}$. Il simbolo dx indica la variabile coinvolta nella derivazione e rispetto alla quale si ricercano le primitive.

ES 1:
Dimostrare che la funzione $\mathrm{G(x)} = \mathrm{x} \cdot \ln^2(\mathrm{x}) - 2 \cdot (1 - \mathrm{x} + \mathrm{x} \cdot \ln(\mathrm{x}))$ è una primitiva di $\mathrm{g(x)} = \ln^2(\mathrm{x})$.
TRACCIA DI SOLUZIONE: deriviamo rispetto ad x la funzione G(x).

ES2:
Si consideri, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $\mathrm{f(x)} = 3 \cdot \mathrm{sen(x)} - 2 \cdot \mathrm{sen}^3(\mathrm{x})$; determinate le costanti a e b in modo che la funzione $\mathrm{F(x)} = \mathrm{a} \cdot \cos(\mathrm{x}) + \mathrm{b} \cdot \cos^3(\mathrm{x})$ sia una primitiva di f(x).
TRACCIA DI SOLUZIONE: deriviamo rispetto ad x la funzione F(x) e trasformiamo quanto ottenuto in modo che contenga la sola funzione sen(x); si ottiene: $\mathrm{F'(x)} = (\mathrm{-a - 3b}) \cdot \mathrm{sen(x)} + 3\mathrm{b} \cdot \mathrm{sen}^3(\mathrm{x})$. Confrontando i suoi coefficienti con quelli di f(x) si ottiene $\mathrm{a} = -1 \quad \mathrm{b} = -\frac{2}{3}$

ES3:
Si consideri la funzione $\mathrm{f(x)} = \frac{1 + \mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2}$ e la sua funzione primitiva <u>F(x) che assume lo stesso valore di f(x) per x = 1</u>. ....(ord. 1988)
TRACCIA DI SOLUZIONE: per determinare una primitiva di f(x) calcoliamo l'integrale indefinito F(x)= $\int \frac{1+\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{x} + \mathrm{K}$; l'informazione sottolineata nel testo ci permetterà di determinare K: ?K in modo che F(1) = f(1) da cui K = 2.

ES 4:
Si consideri la funzione $\mathrm{y} = \mathrm{sen(x)} \cdot (2\cos(\mathrm{x}) + 1)$. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma passa per il punto P(π,0)...........(ord.2008)
TRACCIA DI SOLUZIONE: calcoliamo $\int sen(x) \cdot (2\cos(x) + 1)dx$ e imponiamo il passaggio per il punto assegnato per determinare il valore della costante K.

ES 5:

Nell'insieme delle funzioni y = f(x) tali che $y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$ si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2},1\right)$ e $(0,2)$. .... (scuole italiane all'estero 2008)

TRACCIA DI SOLUZIONE: le funzioni f(x) sono le primitive di $g(x) = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$; calcolato quindi l'integrale di g(x) le costanti a e K si determinano imponendo il passaggio per i punti assegnati

FACCIAMO IL PUNTO SU : EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI

Un'equazione-disequazione lineare in seno e coseno si presenta nella forma: $a \cdot \mathrm{sen}(x) + b \cdot \cos(x) + c \geq 0$ con a, b, c costanti reali non nulle. Se c = 0, l'equazione-disequazione si dice omogenea.

La soluzione di una disequazione di questo tipo ci viene richiesta nella ricerca del segno della funzione goniometrica $y = a \cdot \mathrm{sen}(x) + b \cdot \cos(x) + c$. Vediamo come possiamo procedere per la soluzione:

A] Una funzione di questo tipo è sempre riconducibile ad una sinusoide.

Seguiamo i passaggi:

I° raccogliamo a: $y = a \cdot \left(\mathrm{sen}(x) + \frac{b}{a} \cdot \cos(x) \right) + c$

II° il coefficiente $\frac{b}{a}$ è sempre la tangente trigonometrica di un certo angolo α, quindi trasformiamo

III° $y = a \cdot \left(\mathrm{sen}(x) + \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(x) \right) + c$ *da cui* $y = \frac{a}{\cos(\alpha)} \cdot (\mathrm{sen}(x) \cdot \cos(\alpha) + \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \cos(x)) + c$

IV° per la formula di addizione del seno si ottiene $y = \frac{a}{\cos(\alpha)} \cdot \mathrm{sen}(x + \alpha) + c = K \cdot \mathrm{sen}(x + \alpha) + c$

Il cui grafico si ottiene dal grafico di y = sen(x) applicando le trasformazioni:
traslazione di vettore ($-\alpha$,0) ; dilatazione di ampiezza *K* lungo l'asse y ; traslazione del vettore (0, c)
A questo punto dobbiamo semplicemente risolvere una disequazione elementare: $K \cdot \mathrm{sen}(x + \alpha) + c \geq 0$

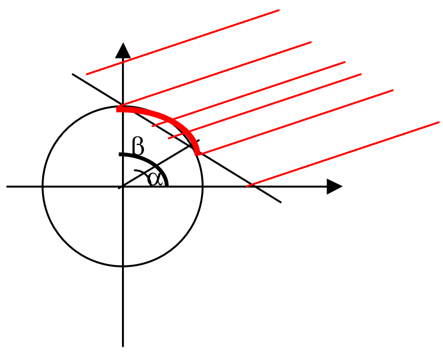
B] Trasformiamo $a \cdot \mathrm{sen}(x) + b \cdot \cos(x) + c \geq 0$ in $a \cdot \mathrm{sen}(x) \geq -b \cdot \cos(x) - c$ che risolviamo graficamente tracciando nello stesso riferimento le funzioni $y = a \cdot \mathrm{sen}(x)$ e $y = -b \cdot \cos(x) - c$ e confrontando la reciproca posizione dei due grafici.

C] Poniamo sen(x) = Y e cos(x) = X nella disequazione da risolvere: aY + bX + c ≥ 0 Per la relazione fondamentale $X^2+Y^2=1$ e la disequazione assegnata si sostituisce con il sistema misto:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y \geq -\frac{b}{a} X - \frac{c}{a} \quad (*) \end{cases}$$

che può essere risolto graficamente nel piano cartesiano in quanto si tratterà di determinare i punti della circonferenza che soddisfano la (*)

La condizione (*) rappresenta il semipiano determinato dalla retta $Y = -\frac{b}{a} X - \frac{c}{a}$ e contenente i punti di ordinata maggiore dell'ordinata dei punti sulla retta stessa.



α e β sono i due angoli i cui raggi delimitano l'arco della circonferenza i cui punti soddisfano la (*), pertanto la disequazione è risolta per $\alpha \leq x \leq \beta$

D] Possiamo anche trasformare la disequazione con le formule parametriche in cui la variabile t rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo x/2. In questo caso va prestata molta attenzione ai calcoli da effettuare e alla determinazione dell'insieme soluzione.

ALL'ESAME DI STATO:

1] Data la funzione $y = a \cdot sen(x) + b \cdot cos(x)$ si determinino i coefficienti a e b in modo che per $x = \frac{2}{3}\pi$ sia y=1 e che i valori estremanti di y siano –2 e 2. (leggi estremi di y). Se ne disegni il grafico. Posto $y = c \cdot sen(x + \alpha)$, si calcolino c e α in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. ……….
(P3, 1977)

2] Data la funzione $y = sen(x) + a \cdot cos(x) + b \quad (-\pi \le x \le \pi)$, si determinino i valori di a e b in modo che ammetta un massimo relativo y = 0 nel punto $x = \frac{\pi}{6}$ e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta. ………. (P1,1974)